TKM4/KT13, 5. Laskuharjoitustehtävät, 29. 9. 2011

1. Olkoot $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ja $h : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ muotoa

$$f(x) = e^{-x}x \qquad g(x) = e^{-x}x^5 \quad \text{ja} \quad h(x) = f^a(x)g^{1-a}(x),$$

missä $a \in [0,1]$. Määritä näiden funktioiden ääriarvopisteet ja tarkastele niiden laatua. Onko kuvauksen $h(x)$ ääriarvopiste esitettävissä kuvauksien $f(x)$ ja $g(x)$ ääriarvopisteiden x_f^* ja x_g^* konveksina kombinaationa muotoa $x_h^* = px_f^* + (1-p)x_g^*$, missä $p \in [0,1]$?

2. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ tunnettu parametri. Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ muotoa

$$f(x) = e^{-\frac{1}{4}x^4}x^n$$

ääriarvopisteet ja tutki niiden laatua parametrin n funktiona.

3. Olkoot vakiot $p, q > 0$ ja $b \geq 1$ tunnettuja. Määritä kuvauksen

$$f(x,y) = p(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - qy - \frac{1}{b}x^b$$

ääriarvopisteet ja tutki niiden laatua.

4. Olkoot $k \in (0,1)$ sekä $p \in (0,1)$ tunnettuja parametreja. Määritä funktion $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ muotoa

$$g(x) = \frac{1}{k}\left(px^k + (1-p)(1-x)^k\right)$$

ääriarvopisteet ja tutki niiden laatua.

5. Olkoot $\gamma \in (0, 1/2)$ ja $p, w, q > 0$ tunnettuja eksogeenisesti määräytyviä parametreja. Määritä yrityksen voiton

$$f(k,l) = p(kl)^\gamma - wl - qk$$

maksimoiva panosallokaatio $(k^*, l^*) \in \mathbb{R}_+^2$ ja määritä myös optimaalinen voitto. Tutki myös miten nimellispalkan w muutos vaikuttaa optimaaliseen pääomapanoksen kysyntään k^*.

6. Olkoot $-\infty < a < b < \infty$ ja $c, d > 0$ tunnettuja vakioita. Ratkaise optimointiongelma

$$\begin{aligned} &\text{ext}_{x,y} \;\; ax^2 + by^2 \\ &\text{s.e.} \quad x + y = 1 \end{aligned}$$

(a) Sijoittamalla rajoite yhtälöön

(b) Lagrangen mentelmää soveltaen

7. Olkoot $W, p_1, p_2 > 0$ tunnettuja vakioita. Ratkaise optimointiongelma

$$\begin{aligned} \mathrm{ext}_{x_1,x_2} &\quad x_1 x_2 \\ \text{s.e.} &\quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = W \end{aligned}$$

   (a) Sijoittamalla rajoite yhtälöön

   (b) Lagrangen mentelmää soveltaen

8. Olkoot $p, M > 0$ tunnettuja eksogeenisesti määräytyviä parametreja. Ratkaise Lagrangen menetelmää soveltamalla ääriarvotehtävä

$$\begin{aligned} \mathrm{ext}_{x,y} &\quad x^2 + 2xy + 4y^2 \\ \text{s.e.} &\quad px + y = M. \end{aligned}$$

   Mitä optimille tapahtuu kun $p \to 0.25$ tai $p \to 1$?

9. Olkoot $\sigma_1, \sigma_2 > 0, r_1 > 0, r_2 > 0, t > 0$ tunnettuja eksogeenisesti määräytyviä parametreja. Ratkaise Lagrangen menetelmää soveltaen optimointiongelma

$$\begin{aligned} \mathrm{ext}_{x_1,x_2} &\quad \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2\right) \\ \text{s.e.} &\quad r_1 x_1 + r_2 x_2 = t \end{aligned}$$

10. Oletetaan, että $p \in (0.5, 1]$. Ratkaise sijoitusmenetelmää soveltamalla ääriarvotehtävä

$$\begin{aligned} \mathrm{ext}_{x,y} &\quad p \ln(1.5x + 1.1y) + (1-p)\ln(0.7x + 1.1y) \\ \text{s.e.} &\quad x + y = 1. \end{aligned}$$