KTS21

Kevät 2012

Tomi Kortela

Solow'n kasvumalli

Sisältö

1 Perusteet ja oletukset

Solow'n tai Solow-Swan kasvumalli on ensimmäinen ja helpoin tapa lähestyä talouskasvua. Samalla se antaa pohjan myöhemmille malleille dynaamisessa makroteoriassa. Mallissa tuotannon tekijöiden – eli työvoiman $L(t)$, pääoman $K(t)$ ja teknologian $A(t)$ – kehitys ajassa johtaa BKT:n, $Y(t)$, kasvuun. Tällöin näiden muuttujien dynamiikan vaikutusta talouskasvuun voidaan mallintaa.

1.1 Oletukset

1. Aika on jatkuvaa $t \in \mathbb{R}_+$. Diskreetin ajan malleissa aika saa vain kokonaisluku arvoja $t = 0, 1, 2, \ldots$. Huom! havaintomme maailmasta ovat aina diskreettissä ajassa.
2. Yksi hyödyke, joka voidaan syödä tai investoida (esim. vilja).
3. Ei valtiota, $G = 0$, eikä ulkomaankauppaa $NX = 0 \Rightarrow$ huoltotase $Y = C + I$.
4. Tuotannon tekijät ovat täydessä käytössä.
5. Tuotannon tekijöiden oletuket:
    - Työvoima kasvaa asteella n: $L(t) = L_0 e^{nt}$, L_0 annettu.
    - Teknologia kasvaa asteella g: $A(t) = A_0 e^{gt}$, A_0 annettu.
    - Tästä seuraa, että $K(t)$:n on oltava endogeeninen muuttuja.
6. Oletetaan tuotantofunktion olevan Cobb-Douglas-tyyppinen eli $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K(t)^{\alpha}(A(t)L(t))^{1-\alpha}$, missä $0 < \alpha < 1$. Tämä tuotantofunktio muiden oletusten ohessa varmistaa, että K/Y-suhde pysyy vakaana. Siis, $A(t)$:n ja $L(t)$:n pitää olla multiplikatiivisia, jolloin tuotantofunktiota kutsutaan Harrod-neutraaliksi.[1] Voidaan osittaa, että tämä tuotantofunktio täyttää NEOKLASSISEN TUOTANTOFUNKTIOn oletukset:
    - **Vakiot skaalatuotot**: molempien panosten kertominen samalla vakiolla, c, kasvattaa

[1] Jos tuotantofunktio on muodossa $Y(t) = A(t)F(K(t), L(t))$, kutustaan sitä Hicks-neutraaliksi.

tuotantoa vakion c verran. Siis,

$$\begin{aligned} F(cK, cAL) &= (cK)^{\alpha}(cAL)^{1-\alpha} && (1) \\ &= c^{\alpha}K^{\alpha}c^{1-\alpha}(AL)^{1-\alpha} && (2) \\ &= cK^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} = cF(K, AL) = cY. && (3) \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että yrityksen koolla ei merkitystä siihen, miten yritys valitsee pääoman ja työvoiman suhteen (riippuu parametreistä ja tuotannon tekijöiden hinnoista). Voimme analysoida vain yhtä yritystä!

- **Positiiviset ja vähenevät tuotot panoksille**: Panosten kasvattaminen lisää tuotanto, mutta tuotannon lisäyksen suuruus pienenee, kun panoksen määrä kasvaa. Siis,

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 K} < 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 L} < 0 \tag{5}$$

Tämäkin oletus on intuitiinen ja myöhemmin sen tärkeys paljastuu. Kuvio piirretään tunnilla.

- **Inada ehdot**: Molempien panosten tuottavuus lähestyy nollaa, kun panoksen määrä lähestyy ääretöntä, ja toisaalta panoksen lähestyessä nollaa tuottavuus on ääretön. Eli

$$\lim_{K\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = \infty \tag{6}$$

$$\lim_{K\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = 0. \tag{7}$$

Tämä oletus varmistaa, että panokset pysyvät positiivisina ja äärellisiä.

- **Panosten välttämättömyys**: Edelliset oletukset jo implikoivat tämän, mutta joskus myös tämä oletus lisätään listaan. Siis, jokaista panosta tarvitaan aina positiivinen määrä, jotta tuotanto pysyy positiivisena:

$$F(0,L) = F(K,0) = 0. \tag{8}$$

1.2 Muuttujien intensiivimuoto

Koska $A(t)$ ja $L(t)$ kasvavat koko ajan, on mallin analysointi tälläisenään vaikeaa. Esimerkiksi keskeisen käsitteen "steady state" eli "lepotila" määritteleminen olisi vaikeaa panosten jatkuvan kasvun takia. Vakioskaalatuotot mahdollistavatkin sen, että voimme siirtyä ns. intensiivi muotoon, jossa kaikki muuttujat ovat jaettu työntekijöiden määrällä ja tuottavuudella:

$$\begin{aligned} Y(AL)^{-1} &= (AL)^{-1}F(K,AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}(AL)^{-1} & (9)\\ y &= f(k) = k^{\alpha}, & (10) \end{aligned}$$

missä $y = \frac{Y}{AL}$ ja $k = \frac{K}{AL}$.

1.3 Kasvuasteet ja logaritmit

Mallien ollessa dynaamisia tarvitaan usein kasvuasteita. Aloitetaan diskreetillä ajalla, jolloin muuttujan x_t kasvuaste periodien $t-1$ ja t välillä, jota merkitään $g_x(t,t-1)$, on

$$\begin{aligned} g_x(t,t-1) &= \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} & (11)\\ 1 + g_x(t,t-1) &= \frac{x_t}{x_{t-1}} \quad \text{otetaan} \quad \log & (12)\\ \log(1+g_x(t,t-1)) \approx g_x(t,t-1) &\approx \log\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) = \log x_t - \log x_{t-1} = \Delta \log x_t. & (13) \end{aligned}$$

Huomaa, että approksimaatio $\log(1+g_x(t,t-1)) \approx g_x(t,t-1)$ perustuu 1. asteen Taylor approksimaatioon, ja pitää paikkansa vain g_x:n pienillä arvoilla!

Siirrytään jatkuvaan aikaan, ja merkitään $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$. Otetaan seuravaksi derivaatta ajan suhteen

$\log x(t)$:stä:

$$\frac{d \log x(t)}{dt} = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = g_x(t), \tag{14}$$

missä $g_x(t)$ on muuttujan x kasvuaste hetkellä t.[2] Osoitetaan, että viimeinen yhtäsuuruus pitää paikkansa (approksimatiivisesti). Derivaatan määritelmää käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} && (15)\\
\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}{x(t)} && (16)\\
&\text{annetaan } \Delta t\text{:n olla pieni, esim. 1} \\
g_x(t) &= \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \approx \frac{x(t+1) - x(t)}{x(t)} = g_x(t, t-1) \approx \Delta \log x_t && (17)
\end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö osoittaa, että voimme helposti siirtyä diskreetin ja jatkuvan ajan välillä, kun kasvuasteita tarkastellaan. On tärkeää muistaa, että tämä on ainoastaan mahdollista, kun muutokset x:ssä ovat pieniä.

2 Solow'n malli

Aloitetaan Solow'n mallin jäljellä olevista oletuksista. Tässä malli johdetaan tarkemmin kuin Romer:n kirjassa, koska tasapainon käsitettä halutaan käyttää. Kuitenkin malli johdetaan hyvin löysästi selkeyden säilyttämiseksi.

Mallissa on kaksi toimijaa kotitaloudet ja yritykset, jotka osallistuvat kolmelle markkinalle: työvoima-, pääoma- ja hyödykemarkkinoille. Käyttäytyminen markkinoilla johtaa siihen, että markkinat ovat tasapainossa. Tarkastellaan seuraavaksi miten.

[2] Huomaa, että tämä on mahdollista määritellä vain jatkuville muuttujille.

2.1 Kotitaloudet

Kotitaloudet ovat identtisiä, ja ne säästävät osan $s \in (0,1)$ tulositaan eli säästäminen saadan $S(t) = sY(t)$, missä Y on BKT tai kansantalouden tulot. Kotitalouksien omistaessa kaikki tuotannontekijät saavat he kaikki yritysten tulot, $Y(t)$, itselleen. Tällöin kulutus on

$$C(t) = Y(t) - S(t) = (1-s)Y(t) \text{ tai} \tag{18}$$

$$c(t) = (1-s)y(t). \tag{19}$$

- Kotitaloudet eivät maksimoi mitään tai hyötyfunktiota ei ole määritelty, jolloin mitään hyvinvointi tuloksia ei voida johtaa. Kotitaloudet onkin mallinnettu keynesiläisen tradition mukaan.
- Tämän lisäksi kotitaloudet vuokraavat pääomaa ja työvoimaa $K(t)$:n ja $L(t)$:n verran yrityksille joka ajanhetki. Kumpaakaan muuttujaa kotitalous ei varsinaisesti päätä. Tosin, säästämisen ja pääoman välillä on riippuvuus, kuten tullaan huomamaan.

2.2 Yritykset

Tarkastellaan edustavaa yritystä, jolloin yrityksen voidaan ajatella maksimoivan aggregaattimuuttujia. Oletetaan täydellinen kilpailu hyödyke- ja tuotantopanos markkinoilla, jolloin edustava yritys (tai yritykset) ottavat hinnat annettuna. Yrityksen maksimointi ongelma on

$$\max_{K \geq 0, L \geq 0} \pi = F(K, A(t)L) - R(t)K - W(t)L, \tag{20}$$

missä $R(t) = r(t) + \delta$. Pääoma kuluu asteella $\delta \in (0,1)$, jolloin $r(t)$ on korkotaso taloudessa. Lisäksi yrityksen ajatellaan pystyvän vuokraamaan pääomaa ja työvoimaa "spot-markkinoilta" tiettyyn hintaan, jolloin voittojen nykyarvon maksimointi täältä tulevaisuuteen on sama asia kuin voiton maksimointi joka hetki. Yrityksen ongelma on siis staattinen. Esimerkiksi pääoman adjustointikustannusket muuttavat asian, johon palataan myöhemmin.

Yrityksen 1. asteen ehdot ovat seuraavat

$$W(t) = F_L(K, A(t)L) \quad \text{ja} \tag{21}$$

$$R(t) = F_K(K, A(t)L), \tag{22}$$

jotka voidaan kirjoittaa muodossa

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) \quad \text{ja} \tag{23}$$

$$R(t) = f'(k(t)). \tag{24}$$

Koska yritykset eivät tuota voittoa (täyd. kilp.), ne jakavat kaikki tulonsa tuotannosta Y takaisin kotitalouksille panosten vuokrana. Katso tarkemmin harjoitukset.

2.3 Pääoman kumuloituminen

Koska muut panokset $L(t)$ ja $A(t)$ ovat annettu eksogeenisina, on pääoman kumuloituminen keskeistä Solow'n mallissa. Pääoman lisäykset ovat investointeja $I(t)$ ja pääoma kuluu joka hetki δ:n verran, jolloin muutos pääoman määrässä, $\dot{K}(t)$, on

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \tag{25}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} = i(t) - \delta k(t). \tag{26}$$

Nyt halutaan, että yhtälön (26) LHS olisi $\dot{k}(t)$. Lasketaan $\frac{d}{dt}\frac{K(t)}{A(t)L(t)} = \frac{d}{dt}k(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(K(t)(A(t)L(t))^{-1}\right) && (27)\\
&= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{(A(t)L(t))^2}\left[\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)\right] && (28)\\
&\quad \text{huomaa, että } \dot{A}(t) = gA(t) \text{ ja } \dot{L}(t) = nL(t) && \\
&= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{(A(t)L(t))^2}\left[gA(t)(t)L(t) + A(t)L(t)n\right] && (29)\\
&= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\left[g + n\right] && (30)\\
&= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - k(t)(n + g) && (31)\\
&\Leftrightarrow && \\
\frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} &= \dot{k}(t) + k(t)(n + g). && (32)
\end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälö (32) nyt yhtälöön (26)

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) + k(t)(n + g) &= i(t) - \delta k(t) && (33)\\
\dot{k}(t) &= i(t) - (n + g + \delta)k(t), && (34)
\end{aligned}$$

jolloin saadaan pääoman kumuloitumisyhtälö intensiivimuodossa. Miksi pääoma "kuluu" nyt asteella $(n + g + \delta)$?

2.4 Markkinoiden tasapainoehdot

Jokaisella markkinalla kysyntä = tarjonta, jolloin markkinatasapainot ovat seuraavat:

- Työvoimamarkkinat ovat tasapainossa: $L = L(t)$.
- Pääomamarkkinat ovat tasapainossa: $K = K(t)$.
- Hyödykemarkkinat ovat tasapainossa: $Y(t) = C(t) + I(t) \Rightarrow S(t) = I(t)$ (tai $s(t) = i(t)$).

Nämä ehdot pätevät kaikilla t:n arvoilla.

2.5 Tasapaino

Aloitetaan pääoman kumulointi identiteetistä (34), joka voidaan muokata seuraavasti

$$\dot{k}(t) = i(t) - (n+g+\delta)k(t) \quad (35)$$

$$= s(t) - (n+g+\delta)k(t) \quad (36)$$

$$= sy(t) - (n+g+\delta)k(t) \quad (37)$$

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+g+\delta)k(t) \quad (38)$$

tai

$$\dot{k}(t) = sk(t)^{\alpha} - (n+g+\delta)k(t), \quad (39)$$

joka on ei-lineaarinen differentiaaliyhtälö. Tämä on niin sanottu Neoklassisen kasvumallin fundamentaalinen differentiaaliyhtälö! Aluksi käytettiin hyödykemarkkinoiden tasapaino, $i(t) = s(t)$, jonka jälkeen säästämisen määritelmää $s(t) = sy(t)$ ja lopuksi tuotanon määräytymistä $y(t) = f(k(t)) = k(t)^{\alpha}$.

Kirjotetaan se vielä diskreetissä ajassa

$$k_{t+1} = sf(k_t) - k_t(\delta + n + g). \quad (40)$$

Tasapaino on tärkeä käsite, joten se vaatii oman määritelmän.

Määritelmä 1. *Kilpailullinen järjestyksellinen tasapaino Solow'n mallissa koostuu siten, että pääoman, tuotannon, kulutuksen ja panosten hintojen urat* $[k(t), y(t), c(t), R(t), w(t)]_{t=0}^{\infty}$ *täyttävät seuraavat ehdot:*

1. *Kotitalouksien tulot on* $y(t)$ $\forall t$, *jolloin kulutus määrätyy yhtälön (19) mukaan.*
2. *Edustavayritys ottaa hinnat annettuna ja maksimoi voittoaan, jolloin se valitsee pääoman ja työvoiman tasot siten, että yhtälöt (23) ja (24) pitävät paikkansa.*
3. *Panosten hinnat ja tuotanto* $y(t)$, *joka on annettua yhtälössä (10), ovat siten, että pääoma-, työvoima- ja hyödykemarkkinat ovat tasapainossa. (Kaksi ensimmäistä tarvitaan ja Walrasin*

laki antaa viimeisen).

- Tärkeää on huomata, että tasapainon käsite pitää sisällään hintojen ja määrien urat nykyhetkestä ($t = 0$) tulevaisuuteen (∞), eikä ainoastaan pistettä: **talous on siis tasapainossa, joka ajan hetki**.

- Kaikki muuttujat voidaan ratkaista, kun $k(t)$:n aikaura tiedetään. Siis, mallissa on yksi tuntematon muuttuja $k(t)$, mutta tarvitsemme sen koko aikauran eikä vain pistettä.

2.6 Miten analysoin/ratkaisen dynaamisia malleja?

Suoraviivainen tapa hoitaa analyysi on ratkaista differentiääliyhtälö (39), joka tässä erikoistapauksessa onnistuukin. Monesti ratkaisua ei ole helppo löytää, ja analyysi perustuukin seuraavaan proseduuriin:

1. Aluksi etsitään piste, jossa systeemin muutos on nolla. Tässä tapauksessa $\dot{k}_t = 0$. Tätä k:n arvoa kutustaan steady state:ksi. Toivottavaa on, että tälläisiä pisteitä on vain yksi.

2. Tutkimalla systeemin käyttäytymistä steady state pisteen ympärillä voidaan steady state:n stabiilisuudesta tehdä päätelmiä, ja samalla mallin käyttäytymisestä.

3. Siirtymäurat pitää ratkaista, jotta mallin siirtymät eri steady state:n välillä voidaan analysoida.

Huom! Proseduurin kohdat 1. ja 2. liittyvät läheisesti tasapainon olemassa olon ja yksikäsitteisyyden toteamiseen. Solow'n mallissa yksi käsitteinen stabiili steady state takaa yksikäsitteisen tasapainon (ja myös sen olemassa olon). **Yksi käsitteinen tasapaino tarkoittaa, että muuttujilla on vain yksi aikaura, joka toteuttaa tasapainon.** Ylipäätään makromalleissa tasapainon olemassa olon ja sen yksikäsiteisyyden osoittaminen on keskeistä. Kun tasapaino on yksikäsitteinen, voidaan hyvillä mielin siirtyä laskemaan siirtymäuraa eri steady state:n välillä (kohta 3.), koska tiedetään, että uria, joista ollaan kiinnostuneita, on vain yksi. Tarkastellaan edellä lueteltuja vaiheita hieman tarkemin lähinnä Solow'n mallin puitteissa.

2.6.1 Steady state

STEADY STATE:llä tai `lepotilalla` tarkoitetaan pääoman (per efektiivinen työntekijä) aikauraa, jossa

$$k(t) = k_* \quad \forall t. \tag{41}$$

Siis, tällä uralla $k(t)$ saa jonkin vakioarvo k_*. Voidaan myös ajatella, että steady state:iä tarkasteltaessa tarkastellaan talouden pitkän aikavälin käyttäytymistä, koska uskotaan, että talous lopulta aina palaa steady state:iin (katso seuraava kohta). Joskus puhutaan myös pitkän aikavälin tasapainosta tai steady state -tasapainosta, mutta on hyvä muistaa, että mallissa tasapaino on taattu kaikilla t:n arvoilla.

Oletetaan, että talous on lepotilassa, jolloin k_*:n ollessa vakion on $\dot{k}(t) = 0$. Sijoitetaan tämä ehto yhtälöön (39)

$$0 = sf(k_*) - k_*(\delta + n + g) = sk_*^\alpha - k_*(\delta + n + g) \tag{42}$$

Nyt voidaan k_* ratkaista helposti:

$$\frac{k_*^\alpha}{k_*} = \frac{\delta + n + g}{s} \tag{43}$$

$$k_* = \left(\frac{\delta + n + g}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} = \left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{44}$$

Steady state on siis parametrien funktio, ja tällä pääoman tasolla (per effektiivinen työn tekijä) sen "kuluminen" on yhtä suurta kuin siihen tehtävät lisäykset, jolloin $k(t)$ pysyy arvossa k_* $\forall$ t. Selvää myös on, että steady state muuttuu, jos jokin steady state:n määräävistä parametreista muuttuu. Tässä tapaukssa **steady state:n** olemassa olo ja yksi käsitteisyys (Huom! ei tasapainon) voidaan suoraa osoittaa laskemalla, mutta myös yleisempi tapaus todistus on mahdollinen. Lisäksi tunnilla keskustellaan tilanteista, joissa on monta steady state:ä tai ei yhtään.

2.6.2 Steady state:n stabiilisuus ja tasapainon olemassa olo

Nyt tiedetään, että steady state on olemassa, mutta miten talous käyttää sen ympärillä. Mallin käyttäytyminen stady state:n ympäristössä on tärkeää, koska **tasapaino** on määritelty kaikille $k(t)$:n arvoille, eikä vain tilanteessa $k(t) = k_*$. Tilanne, jossa $k(t) \neq k_*$ on mahdollista kahdesta eri syystä:

1. Lähtöpiste $k(0) \neq k_*$.

2. Jokin parametreista, joka määrää steady state:n muuttuu, jolloin $k_*^{\text{vanha}} \neq k_*^{\text{uusi}}$.

Seuraavassa oletetaan, että vain yksi steady state on löytynyt. Tällöin tasapaino on olemassa, jos annettuna $k(0)$ on vain yksi ura, joka toteuttaa tasapainon. Siis, on vain yksi ura joka toteuttaa yhtälön (39). Tässä tapauksessa riittää se, että osoitetaan: $k(t)$:n uran aina konvergoituvan pisteeseen k_* (eli $k(t) \to k_*$). Tämä toteutuu, jos steady state on stabiili. Stabilisuus voidaan osoittaa lokaalisti tai globaalisti.

Lokaali stabilisuus Yleisesti, jos $g(x)$ on differoituva, ja $g(x_*) = 0$. Niin tilanteessa $g'(x_*) < 0$ on yhtälö $\dot{x}(t) = g(x(t))$ lokaalisti stabiili x_*:n ympärillä. Siis, jos deviaatiot steady state:stä ovat pieniä, palaudutaan aina takaisin ko. pisteeseen $\Rightarrow$ Steady state on lokaalisti stabiili.

Globaali stabilisuus Kysymys on, jos talous lähtee mistä tahansa pisteestä k_0, mihin se päätyy? Jos systeemi on globaalisti stabiili, vastaus on: aina pisteeseen k_*. Tämä nähdään helposti tarkastelamalla yhtälöä (39):

- Kun $k(t) = k_*$ on $sf(k(t)) = k(t)(\delta + n + g)$. Koska $f'' < 0$, niin tilanteessa $k(t) > k_*$ seuraa, että $sf(k(t)) < k(t)(\delta + n + g)$ eli $\dot{k}(t) < 0$. Tilanne on päin vastainen tilanteessa $k(t) < k_*$, jolloin $\dot{k}(t) > 0$. Siis, mistä tahansa pisteestä $k(0) \in (0, \infty)$ päädytään aina pisteeseen k_*.[3] Siis, aloittamalla millä tahansa pisteellä $k(0)$, $k(t) \to k_*$.

- Kirjoitetaan yhtälö (39) vielä seuraavsti: $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sk(t)^{\alpha-1} - (\delta + g + n)$. Nyt $k(t)$:n kasvuaste on LHS:lla, ja piirtämällä kuvio nähdään konvergoituminen selvästi.

[3] On mahdollista osoittaa, että $k(0) = 0$ on steady state, mutta suljetaan se pois tarkastelusta.

2.6.3 Siirtymäura, log-linearisointi ja konvergenssi

Nyt tiedämme, että steady state on olemassa ja tasapaino on yksi käsitteinen, joten siirtymiä eri steady state:ien välillä voidaan mielekkäästi tarkastella. Steady state riippuu sen määrittelevistä parametreistä (katso yhtälö (44)), ja muutos parametreissä johtaa steady state:n muuttumiseen, mutta mikä on $k(t)$:n ura näiden kahden steady state:n välillä? Muuttujien uraa kahden steady state:n välillä kutsutaankin muuttujien siirtymäuraksi. Tietenkin talous on edelleen tasapainossa myös siirtymäuralla.

Perusteita siirtymäuran ratkaisuun:

- Malli antaa $k(t)$:n liikeyhtälön (39) eli differentiaaliyhtälön, mutta nyt ollaan kiinnostuineita siitä, mikä $k(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön (39). Ratkaisu on siis yhtälö, joka riippuu eksogeenisista muuttujista ($k(0)$) ja parametreistä sekä ajasta t.
- Tämä yhtälö antaa k:n arvon, joka ajan hetki. Ei-dynaamisissa taloustieteen malleissa ratkaisu on useasti jokin piste, mutta tässä ratkaisu on funktio: funktio ajan t suhteen.
- Yleisesti ei-lineaarisia dynaamisia malleja ei pystytä ratkaisemaan ilman numeerisia menetelmiä eli suljetunmuodon ratkaisua ei ole. Tosin Solow'n mallissa tälläinen kuitenkin löytyy.
- Tässä keskitytään kuitenkin approksimatiivisiin ratkaisun löytymiseen, koska samaa menetelmää käytetään jatkossakin. Eli ei-lineaariset yhtälöt linearisoidaan käyttämällä Taylor-approksimaatiota steady state:n ympärillä.
- Tämän jälkeen lineaariselle differentiaaliyhtälölle ratkaisu on suht' helppo löytää.

Aloitetaan yhtälön (39) log-linearisoinnilla (Romer:n kirjassa käytetään linearisointi ilman logaritmejä). Tekemällä log-linearisointi linearisoinnin sijaan, voidaan muutokset muuttujassa ilmaista muuttujan prosenttuaalisena erona sen steady state -arvosta, ja k:n tason sijaan voidaan vastausta tulkita k:n kasvuasteena. Tällöin päästään mittayksikkö vapaaseen tarkasteluun.

1. Aluksi yhtälöä (39) manipuloimalla saadaan se logaritmiseen muotoon

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= sk^{\alpha} - (\delta + n + g)k(t) && (45)\\
\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} &= sk(t)^{\alpha-1} - (\delta + n + g) && (46)\\
\frac{d \log k(t)}{dt} &= se^{-(1-\alpha)\log k(t)} - (\delta + n + g) && (47)\\
\dot{\hat{k}}(t) &= se^{-(1-\alpha)\hat{k}(t)} - (\delta + n + g), && (48)
\end{aligned}$$

missä $\hat{k}(t) \equiv \log k(t)$.

2. Seuraavaksi ota 1. asteen Taylor approksimaatio $\dot{\hat{k}}(t)$:stä steady state:n $\hat{k}_*$ ympärillä. Huom! Nyt dervioitava muuttuja on $\hat{k}(t)$. Siis,

$$\begin{aligned}
\underbrace{\dot{\hat{k}}(t)}_{f(x)} &\approx \underbrace{se^{-(1-\alpha)\hat{k}_*} - (\delta + n + g)}_{f(x_0)} + \underbrace{s(-(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)\hat{k}_*}}_{f'(x_0)} \underbrace{(\hat{k}(t) - \hat{k}_*)}_{x-x_0} && (49)\\
\dot{\hat{k}}(t) &\approx s(-(1-\alpha)k_*^{\alpha-1}(\hat{k}(t) - \hat{k}_*) && (50)\\
& \quad \text{sijoita } k_* = \left(\frac{\delta + n + g}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad \text{katso (44)}\\
\dot{\hat{k}}(t) &\approx -\underbrace{(1-\alpha)(\delta + n + g)}_{\lambda}(\hat{k}(t) - \hat{k}_*) && (51)\\
\dot{\hat{k}}(t) &\approx -\lambda\left[\hat{k}(t) - \hat{k}_*\right] && (52)
\end{aligned}$$

Nyt kyseessä on lineaarinen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö.

Nyt λ mittaa talouden konvergoitumisnopeutta steady state:iin. Huomaa, että LHS on k:n kasvuaste. Voidaan osoittaa, että

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{y}}(t) &\approx -\lambda\left[\hat{y}(t) - \hat{y}_*\right] \quad \text{ja} && (53)\\
\dot{\hat{c}}(t) &= \dot{\hat{y}}(t) && (54)
\end{aligned}$$

3. Ratkaistaan edellä saatu differentiaaliyhtälö (52). Yhtälö on ei-eksakti differentiaaliyhtälö, mutta kerrottaessa integroivalla tekejillä se muuttuu eksaktiksi. Tällöin ratkaisu voidaan

löytää "suoraan integoimalla", mutta integroivan tekijän löytämiseksi ei ole olemasa mitään yleistä menettelyä, vaan se pitää löytää tapauskohtaisesti.[4] Yhtälön (52) integroivatekijä on $e^{\lambda t}$, joten kerrotaan yhtälö sillä ja muokataan

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda t}\left[\dot{\hat{k}}(t)+\lambda \hat{k}(t)\right] &= e^{\lambda t}\lambda \hat{k}_* && (55)\\
\int e^{\lambda t}\left[\dot{\hat{k}}(t)+\lambda \hat{k}(t)\right]dt &= \int e^{\lambda t}\lambda \hat{k}_* dt && (56)\\
e^{\lambda t}\hat{k}(t)+b_0 &= \hat{k}_* e^{\lambda t}+b_1 && (57)\\
\hat{k}(t) &= \hat{k}_*+e^{-\lambda t}\left[b_1-b_0\right]. && (58)
\end{aligned}
$$

Tämä on yhtälön yleinen ratkaisu.

Käytetään alkuehtoa, jotta löydetään eksakti ratkaisu. Kun $t=0$, jolloin $\hat{k}(0)=\hat{k}_0$, saadaan yhtälöstä (58)

$$\hat{k}_0-\hat{k}_*=b_1-b_0 \Leftrightarrow \hat{k}_0=b_1 \text{ ja } \hat{k}_*=b_0. \quad (59)$$

Differentiaaliyhtälön eksakti ratkaisu on siis

$$
\begin{aligned}
\hat{k}(t) &= \hat{k}_*+e^{-\lambda t}\left[\hat{k}_0-\hat{k}_*\right] \text{ tai} && (60)\\
k(t) &= k_*\left(\frac{k_0}{k_*}\right)^{e^{-\lambda t}} && (61)
\end{aligned}
$$

2.6.4 Yhteenveto

1. Laske steady state ennen pysyvää parametrin muutosta eli laske $k(0)$. Tämä on lähtöpiste.
2. Laske steady state parametrin muutoksen jälkeen eli laske k_*. Tänne lopulta päädytään.
3. Linearisoi pääoman liikeyhtälö (39) (annettuna muuttuneet parametrit) k_*:n ympäristössä. Johda approksimaatio k:n uralle yliajan eli yhtälö (60).
4. Ratkaise $k(t)$:n ura $k(0)$:n ja k_*:n välillä käyttämällä yhtälöä (60). Käyttäen $k(t)$:n arvoja

[4] Integroivalla tekijällä kerrottaessa voidaan saada ylimääräisiä ratkaisuja tai menettää ratkaisuja.

ratkaise loput muuttujat.

3 Solow'n mallin analyysiä

3.1 Solow'n diagrammi

-Piirretään ja analysoidaan tunnilla...

3.2 Mikä on talouden kasvuaste Solow'n mallissa?

Solow'n malli on kasvumalli, joten on luonnollista kysyä, mikä on talouden kasvuaste Solow'n mallin mukaan. Jaetaan tarkastelu kahteen eri osaan:

1. Talous on ns. tasapainotetulla kasvu-uralla (Balanced growth path). Tämä tarkoittaa, että talous steady state:ssä.
2. Talous on siirtymäuralla eli steady state:n ulkopuolella.

3.2.1 BKT:n kasvuaste tasapainotettulla kasvu-ura

Mikä on BKT:n kasvu nopeus, kun talous on steady state:ssä? Yhtälöstä (44) saadaan BKT per efektiivinen työntekijä

$$k_*^\alpha = y_* = \left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{62}$$

$$\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = \left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{63}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = A(t)\left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad : \text{BKT per capita} \tag{64}$$

$$Y(t) = L(t)A(t)\left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad : \text{BKT} \tag{65}$$

- Ottamalla logaritmit ja aikaderivatta nähdään, että $\tilde{y}(t)$:n kasvuvauhti on g eli tuottavuuden kasvuvauhti ja $Y(t)$:n kasvuvauhti on $n+g$ eli työvoiman (tai populaation) ja tuottavuuden kasvuvauhtien summa.

- Mikä on $K(t)$:n kasvuvauhti? Koska $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$ on vakio, on $K(t)$:n kasvettava yhtä nopeasti kuin $A(t)$:n ja $L(t)$:n. Eli $K(t)$ kasvaa vauhdilla $n+g$ ja $\tilde{k}(t)$ vauhdilla g.

- Itse asiassa steady state:ssä tai tasapainoisella kasvu-uralla kaikki muuttujat (tulot, tuotanto, kulutus, pääoma, säästäminen ja investoinni) kasvavat vakioiduilla (mutta mahdollisesti eriarvoisilla) kasvuasteilla – tästä nimitys tasapainoin kasvu-ura (balanced growth path). Lopulta talous hakeutuu aina tälläiseen tilaan, ja Solow'n mallissa edellä mainitut muuttujat kasvavat samalla asteella. Ajattele tilanteita, joissa kasvuasteet ovat positiivisia, mutta Y:n ja C:n kasvuasteet eri suuria. Mitä silloin tapahtuisi?

3.2.2 BKT:n kasvuaste siirtymäuralla

Tarkastellaan BKT:n kasvu nopeutta siirtymäuralla. Aloitetaan BKT:n yhtälöstä

$$
\begin{aligned}
y(t) &= k(t)^{\alpha} && (66)\\
\tilde{y}(t) &= A(t)k(t)^{\alpha} \text{ otetaan log ja aikaderivaatta} && (67)\\
\frac{\dot{\tilde{y}}(t)}{\tilde{y}(t)} &= g + \alpha\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = g + \alpha\dot{\hat{k}}(t) && (68)
\end{aligned}
$$

- BTK per capita kasvuaste siirymä uralla on $g + \alpha \times k$:n kasvuaste ko. hetkellä.

- k:n kasvuaste ko. hetkellä saadaan mm. yhtälöstä (52).

3.2.3 Yhteenveto

1. Jos maa on kehittyvä talous $k(t) < k_*$, on BKT per capita:n kasvu nopeampaa kuin g, koska $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} > 0$.

2. Jos maan pääoma on steady state:ä korkeampi $k(t) > k_*$, on BKT per capita:n kasvu

hitaampaa kuin g, koska $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} < 0$

3. Jos maa on steady state:ssä $k(t) = k_*$, on BKT per capita:n kasvu g, koska $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 0$.

3.2.4 Mikä on BKT:n kasvuaste g:n muuttuessa?

Tarkastellaan vielä tilannetta, jossa tuottavuuden kasvuaste, g, muuttuu. Mitä tapahtuu BKT per capitan kasvuasteelle? Alkuperäisessä steady state:ssä $\frac{\dot{\tilde{y}}(t)}{\tilde{y}(t)} = g$. Ajatellaan, että tuottavuus muuttuu $g \rightarrow g'$ ja $g' > g$, jolloin kasvuaste on

$$\frac{\dot{\tilde{y}}(t)}{\tilde{y}(t)} = g' + \alpha \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}. \tag{69}$$

Jatketaan tarkastelua vielä muutoksen tapahtumahetkellä $t = 0$, jolloin pääoma ei vielä ole muuttunut, mutta g on. Tällöin $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$:n arvo saadaan sen määräävästä yhtälöstä erotuksena ennen ja jälkeen parametrimuutoksen annettuna pääoma pisteessä $k(0)$. Siis,

$$\left.\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\right|_{t=0} = \underbrace{\left(\frac{sf(k(0))}{k(0)} - (\delta + n + g')\right)}_{\left.\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\right|_{g=g'}} - \underbrace{\left(\frac{sf(k(0))}{k(0)} - (\delta + n + g)\right)}_{\left.\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\right|_{g=g}} = g - g'. \tag{70}$$

Sijoitetaan yhtälöön (69), joka tuottaa

$$\left.\frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\hat{y}(t)}\right|_{t=0} = g' + \alpha(g - g') \tag{71}$$

$$= \alpha g + (1 - \alpha) g', \tag{72}$$

jolloin $g < \left.\frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\hat{y}(t)}\right|_{t=0} < g'$ eli BKT per capita:n kasvuaste on painotettu keskiarvo kahdesta eri kasvuasteesta. BKT per capita:n kasvuaste ei kuitenkaan heti nouse g':n tasolle, koska pääomaa pitää kumuloida. Piirretään tunnilla kuvio tilanteesta.

3.3 Konvergenssihypoteesi

Stabiilisuuden ja kasvuasteiden tarkastelu suoraan osoitti, että malli implikoi konvergenssihypoteesin. Tarkastellaan tunnilla myös ehdollista konvergenssihypoteesia.

3.4 Komparatiivinen dynamiikka ja säästämisen muutos

Tarkastellaan koko taloutta aluksi kuvioiden avulla...

Tulokset

1. Pysyvä säästämisasteen muutos ajaa talouden siirtymä uralle.
2. Säästämisen kasvu aiheuttaa vain VÄLIAIKAISEN kasvun Y/L:ssä.
3. Lopulta talous palautuu steady state:iin ja Y/L kasvaa vauhdilla g.

Entä kulutus?

Steady state:ssä investoinnit per efektiivinen työntekijä on säästämisen kanssa yhtä suuret eli

$$s_* = i_* = k_*(\delta + n + g), \quad \text{jolloin} \tag{73}$$

$$c_* = y_* - i_* = f(k_*) - k_*(\delta + n + g). \tag{74}$$

k_* on annettu yhtälössä (44), ja merkitään sitä $k_*(s, n, g, \delta)$. Johtuen siitä, että $f'' < 0$ on c_* konkaavi funktio s:stä, jolloin voidaan kysyä, millä s:n arvolla c saa maksimi arvonsa. Kysymyksessä on yhtälön $c_*(s) = f(k_*(s, n, g, \delta)) - k_*(s, n, g, \delta)(\delta + n + g)$ maksimointi tehtävä, ja välttämättömät ehdot ovat

$$\frac{\partial c_*}{\partial s} = f'(k_*(s, n, g, \delta))\frac{\partial k_*(s, n, g, \delta)}{\partial s} - (\delta + n + g)\frac{\partial k_*(s, n, g, \delta)}{\partial s} = 0 \tag{75}$$

$$\left[f'(k_*(s, n, g, \delta)) - (\delta + n + g)\right] \frac{\partial k_*(s, n, g, \delta)}{\partial s} = 0 \tag{76}$$

$$. \tag{77}$$

Esimerkiksi tällä tuotantofunktiolla on yksinkertaista osoittaa, että $s_{gold} = \alpha$ ja yhtälö (44) osoittaa sen jälkeen k_{gold}:n. Tämä on pääoman KULTAISEN SÄÄNNÖN osittama taso.[5] Siis, säätämisasteella s_{gold} kulutus maksimoituu. Jos $s > s_{gold}$, taloudessa on "liikaa" pääomaa ja tällöin puhutaan DYNAAMISESTA TEHOTTOMUUDESTA.

Koska säästämisaste on eksogeeninen, on dynaamisesta tehottumuudesta puhuminen hieman vaarallista. Seuraavilla luennoilla tullaankin näkemään, että yleisesti tälläistä tehottumuutta ei esiinny.

4 Kasvulaskenta

Yksi Solow'n mallin tai oikeastaan neoklasisen tuotantofunktion sovellutuksista on KASVULASKENTA. Kasvulaskennassa halutaan tietää miten paljon talouskasvusta selittyy eri tuotannontekijöiden kasvun avulla.

Kirjoitetaan neoklassinen tuotantofunktio muodossa:

$$Y(t) = \tilde{A}(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}, \tag{78}$$

missä voidan ajatella, että $\tilde{A}(t) = A(t)^{1-\alpha}$. Otetaan logaritmit ja defferentoidaan ajan suhteen

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \alpha\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{\dot{\tilde{A}}(t)}{\tilde{A}}. \tag{79}$$

Talouskasvu on siis painotettu (painoina panososuudet) keskiarvo panosten kasvusta + tuottavuuden kasvu. BKT per capita taas kasvaa

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \alpha\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right) + \frac{\dot{\tilde{A}}(t)}{\tilde{A}}. \tag{80}$$

(Sijoittamalla Solow'n mallin implikoima pääoman kasvuaste tasapainotetulla kasvu-uralla saadaan BKT per capita:n kasvuasteen Solow'n mallissa steady state:ssä.)

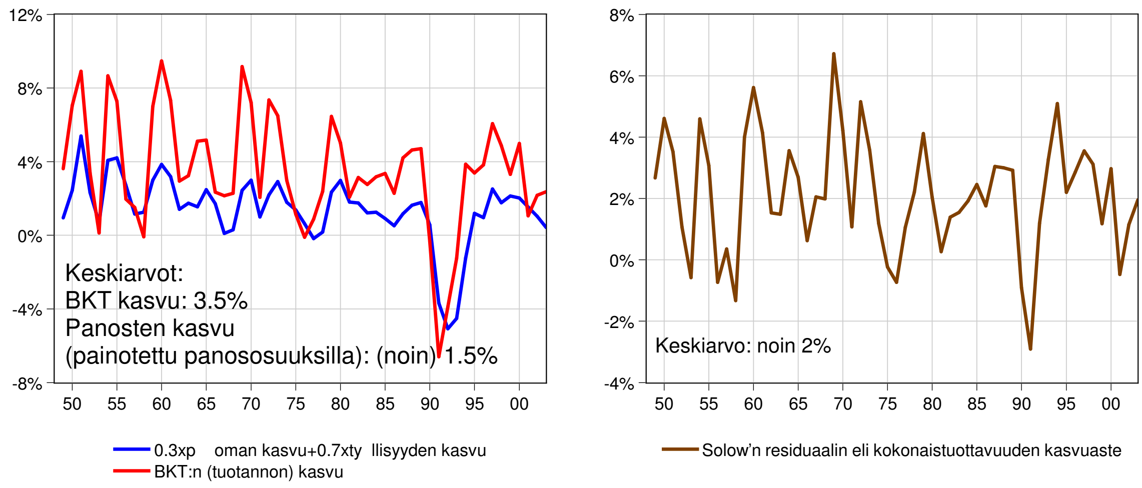
[5] Kultaisen säännön nimi tulee raamatuun kultaisesta säännöstä: Tee muille niin kuin haluisit heidän tekevän itsellesi. Taloustermein tämä tarkoittaa, että tällä pääoman/säästämisasteen tasolla taataan nykyiselle ja kaikille tuleville sukupolville sama kulutuksen taso.

Nyt huomioitavaa on, että $Y(t)$, $K(t)$ ja $L(t)$ pystytään mittaamaan datasta, jolloin se mitä jää jäljelle on teknologian kasvu. Tätä kutusutaan SOLOW'N RESIDUAALIKSI. Siis,

$$\frac{\dot{\tilde{A}}(t)}{\tilde{A}} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \alpha\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (1-\alpha)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}. \tag{81}$$

Solow'n residuaaliin tullaan palaamaan suhdannevaihtelujen kohdalla.

Valitaan α, jolloin BKT:n kasvu voidaan jakaa osiin. Kuviossa 1 on esimerkki Suomesta



Kuva 1: Kasvulaskenta Suomessa 1948-2003.

Kasvulaskenta on erityisen tärkeää, koska halutaan tietää, mikä on eri panosten muutosten kontribuutio talouskasvuun. Esimerkiksi Suomessa voidaan todeta tuottavuuden kehityksen vastaan noin 60% talouden kasvusta. Siis, talouskasvu on Suomessa johtunut paljolti siitä, että tuotannontekijöitä (pääomaa ja työvoimaa) on koko ajan käytetty tehokaammin. 40% talouskasvusta selittyy taas tuotannon tekijöiden lisääntymisellä. Hieman maltillisempi arvio on noin 50% ja 50%. Huom! Kasvulaskenta ei kuitenkaan kerro, mikä on talouskasvun alkuperäinen syy. Tuotantopanokset ovat voineet kasvaa ainoastaan sen takia, että tuottavuus on kasvanut. Toisaalta kasvulaskennalla voidaan selvittää mielenkiintoisia eroja eri maiden välillä.

Monien Aasian maiden talouskasvu näyttää johtuvan lähinnä panosten kasvusta, esim. Singaporen taloukasvusta 70% selittyy pääoman kasvulla! Tämä tietenkin antaa kuvan siitä, mistä lopulta erot BKT per capitassa johtuvat: liian vähäisistä panoksista vai teknologian riittämättömsätä tasosta. Tietenkin politiikkasuositukset ovat näiden kehittämiseen erilaiset: Investoinnit pääomaan vai tuotekehitykseen?

5 Solow'n mallin käyttö/opetukset

Kvantitatiivinen analyysi Miten löydän parametrien arvot?

- $n =$ työvoiman kasvuaste (datasta), esim. 0.01
- $g =$ BKT per capita:n kasvuaste (datasta), esim. 0.02
- $s =$ koko talouden säästämisaste $s = 1 - \frac{c}{y}$ (datasta), esim. 0.2
- $\delta =$ poistot (arvonalennukset) $\frac{\delta K}{K}$ (datasta), esim. 0.05
- $1 - \alpha = \frac{\text{työvoimalle maksetut korvaukset}}{\text{BKT}}$, esim. $\alpha = \frac{1}{3}$.

Nyt voidaan edellä olleita yhtälöitä käyttämällä tehdä helposti kvantitatiivista analyysiä.

Kasvufaktat

1. Tasapainotetulla kasvu-uralla BKT kasvaa vauhdilla $n + g$ ja BKT per capita kasvaa vauhdilla g. Pitkällä aikavälillä maa saavuttaa aina tasapainotetun kasvu-uran.
2. Tasapainotetulla kasvu-uralla K/Y on vakio.
3. Korko on vakio ja palkat kasvavat asteella g.
4. Tuotannontekijä tulot jakautuvat koko ajan vakioidusti: α pääomalle ja $1 - \alpha$ työvoimalle.

Malli implikoi nämä Kaldorin kasvufaktat. Kuitenkin tärkein opetus on, että pääomaa (K) kasvattamalla ei voi talouskasvua nopeuttaa loputtomiin: vertaa Neuvostoliitto, kasvuteoria 50-60-luvulla, Itä-Aasian maat nykyään?

Kehitysfaktat

1. Hyvinvointi erot maiden välillä (erot BKT per capita:ssa) johtuvat eroista s, n ja δ:ssa (tai ehkä A:n tasoissa).

2. Pysyvät erot maiden välisissä *kasvuasteissa* (BKT per capita) ovat ainoastaan mahdollisia, jos g:t eroavat maiden välillä.

3. Siirtymäurat (maiden hakeutuminen uuteen steady state:n) on ainoa selitys kasvuasteiden lyhyt aikaiselle vaihtelulle.

4. Ehdollinen konvergenssihypoteesi vs. absoluuttinen konvergenssihypoteesi.

5. Säästämis- tai investointiasteen kasvu suhteessa muihin maihin nostaa maan asemaa BKT per capita jakaumassa. Toisin päin taas tapahtuu, jos n kasvaa.

Alustava yhteenveto Malli implikoi paljon kasvufaktoja oikein ja lisäksi joitakin kehitysfaktoja. Malli korostaa teknologian kehityksen tärkeyttä talouskasvun tuojana. Kuitenkin $A(t)$ oletettiin täysin eksogeeniseksi eli talouskasvu periaatteessa oletettiin malliin, joten mitenkään hyvää vastausta talouskasvulle emme saaneet. Seuraava askel on tehdä $A(t)$ endogeeniseksi $\Rightarrow$ endogeeninen kasvuteoria tai uusi kasvuteoria.

Solow'n mallia voidaan laajentaa monin eri tavoin. Tarkastellaan seuraavaksi humaanin pääoman lisäämistä malliin.

6 Solow'n malli ja humaanipääoma

6.1 Malli

Koulutustasot eri maiden välillä vaihtelevat huimasti. Intuitio sanoo ja mikrotason ekonometriset todisteet kertovat, että koulutetut ihmiset ovat tuottavampia kuin ei koulutetut. Lisätään nyt koulutus tai oppineisuus malliin, ja kutsutan tätä humaaniksi pääomaksi. Tässä yksinkertaistetusta esityksessä oletetaan, että korkeamman humaanin pääoman omaavan ihmisen työn tuottavuus on korkeampaa.

6.1.1 Tuotantofunktio

Tuotantofunktion oletetaan Cobb-Douglas muotoon:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{\eta} (A(t)L(t))^{1-\alpha-\eta} \tag{82}$$

$$y(t) = k(t)^{\alpha} h(t)^{\eta}, \tag{83}$$

missä $0 < \alpha < 1$, $0 < \eta < 1$ ja $\alpha + \eta < 1$. $H(t)$ kuvaa nyt taloudessa vallitsevaa humaanin pääoman tasoa (esim. koulutusvuodet), ja sen voi mieltää samanlaiseksi muuttujaksi kuin $K(t)$:n. Pienillä kirjaimilla merkitään taas muuttujaa per efektiivinen työn tekijä eli $x(t) = \frac{X(t)}{A(t)L(t)}$.

6.1.2 Pääomien kumuloituminen

Oletetaan nyt, että humaani pääoma saa saman investointimuodon kuin fyysinen pääoma, ja ne kuluvat samalla asteella δ. Kotitaloudet säästävät osan s_k tuloistaan investoidakseen fyysiseen pääomaan ja osa s_h tuloista invetoidaan taas humaaniin pääomaan. Työvoima ja teknologia kasvavat eksogeenisilla asteilla n ja g. Pääoman kumulointiyhtälöt ovat

$$\dot{k}(t) = s_k k(t)^{\alpha} h(t)^{\eta} - (\delta + n + g)k(t) \tag{84}$$

$$\dot{h}(t) = s_h k(t)^{\alpha} h(t)^{\eta} - (\delta + n + g)h(t). \tag{85}$$

Kysymyksessä on kahden differentiaaliyhtälön systeemi (vrt. Ramsey:n malli, joka esitellään myöhemmin).

6.1.3 Steady state

Ratkaistaan steady state seuraavaksi mallin steady state. Yhtälöistä (84) ja (85) saadaan

$$h_* = \left(\frac{\delta+n+g}{s_k}k_*^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\eta}} \tag{86}$$

$$k_* = \left(\frac{\delta+n+g}{s_h}h_*^{1-\eta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{87}$$

Sijoita yhtälö (87) yhtälöön (86), joka tuottaa

$$h_* = \left(\frac{\delta+n+g}{s_k}\right)^{\frac{1}{\eta}}\left[\left(\frac{\delta+n+g}{s_h}\right)^{\frac{1}{\alpha}}h_*^{\frac{1-\eta}{\alpha}}\right]^{\frac{1-\alpha}{\eta}} \tag{88}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$h_* = \left[\left(\frac{s_k}{\delta+n+g}\right)^{\alpha}\left(\frac{s_h}{\delta+n+g}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\eta-\alpha}} \tag{89}$$

Sijoittamalla yhtälön (89) yhtälöön (87) saadaan

$$k_* = \left(\frac{\delta+n+g}{s_h}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left[\left(\frac{s_k}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\eta-\alpha}}\left(\frac{s_h}{\delta+n+g}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\eta-\alpha}}\right]^{\frac{1-\eta}{\alpha}} \tag{90}$$

$$= \left[\left(\frac{s_k}{\delta+n+g}\right)^{1-\eta}\left(\frac{s_h}{\delta+n+g}\right)^{\eta}\right]^{\frac{1}{1-\eta-\alpha}} \tag{91}$$

Lopuksi voidaan ratkaista tuotanto steady state:ssä eli sijoitetaan yhtälöt (89) ja (91) yhtälöön (83), jolloin sadaan y_* eli

$$y_* = \left[\left(\frac{s_k}{\delta+n+g}\right)^{1-\eta}\left(\frac{s_h}{\delta+n+g}\right)^{\eta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\eta-\alpha}}\left[\left(\frac{s_k}{\delta+n+g}\right)^{\alpha}\left(\frac{s_h}{\delta+n+g}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{\eta}{1-\eta-\alpha}} \tag{92}$$

$$= \left(\frac{s_k}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\eta-\alpha}}\left(\frac{s_h}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\eta}{1-\eta-\alpha}} \tag{93}$$

- k_* ja h_* arvoista huomataan (yhtälöt (91) ja (89)), että jos toisen pääoman investoinnit kasvaavat lisääntyy myös toinen, koska 1. pääoman lisäys kasvattaa $y(t)$:tä.

- Yhtälöstä (93) nähdään, että BKT:n taso riippuu nyt ei ainoastaan investoinneista pääomaan ($s_k y(t)$), mutta myös investoinneista humaaniin pääomaan ($s_h y(t)$). Näiden investointien tärkeys riippuu parametreista α ja η: mitä korkeampi arvo sitä tärkeampi on ko. investoinnit pääomaan.

6.1.4 Steady state:n stabiilisuus

- Pystytään osoittamaan, että on olemassa vain yksi steady state (ohitetaan todistus).
- Vaihekaavion avulla tutkitaan stabiilisuutta (ohitetaan) $\Rightarrow$ steady state stabiili $\Rightarrow$ tasapaino yksikäsitteinen.

6.2 Empiirinen sovellus: Maiden väliset tuloerot

Seuraten Mankiw, Romer ja Weil (1992):"A contribtion to the Emprirics of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics 107: 407-437, voidaan mallilla yrittää selittää BKT per capita eroja maiden välillä.

6.2.1 Oletukset

- Otetaan $j = 1, \ldots, J$ maata, ja ajatellaan niiden olevan riippumattomia toisistaan (eristyneitä saaria).
- Maat ovat steady state:ssä, ja yritetään etsiä syitä tasoeroihin BKT per capitassa. Miksi toiset ovat rikkaita ja toiset köyhiä?
- Teknologia maalle j on $A_j(t) = \bar{A}_j e^{gt}$ eli mailla on sama teknologian kasvuaste (g), mutta lähtötasot eroavat ($\bar{A}_j$). Tämä tarkoitta, että II-maailmansodan jälkeen ajatellaan maiden tulojakauman pysyneen vakaana. Lisäksi $\bar{A}_j = \epsilon_j A$, missä ϵ_j, jota ei pystytä havaitsemaan, määrää maan j teknologian tason. Tämä on tulevassa regressiossa virhetermi ja sen oletetaan olevan riippumaton muista muuttujista.
- Kaikille j: $\delta + g = 0.05$ ja n_j on maan populaation kasvuaste.

- Approksimoidaan $s_{k,j}$ investointiasteella $\frac{I_t}{Y_t}$ ja $s_{h,j}$ on taas osuus työikäisestä väestöstä, joka on käynyt vähintään 2. asteen koulutuksen.
- Maa kohtaiset muuttujat ovat keskiarvoja ko. maalle.

6.2.2 Estimoitava yhtälö

Oletusten avulla voidaan yhtälö (93) kirjoittaa maalle j:

$$y_j^* = \left(\frac{s_{k,j}}{\delta + n_j + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\eta-\alpha}} \left(\frac{s_{h,j}}{\delta + n_j + g}\right)^{\frac{\eta}{1-\eta-\alpha}}, \tag{94}$$

jolloin per capita BKT saadaan

$$\tilde{y}_j^* = \frac{Y_j^*}{L_j^*} = \epsilon_j A e^{gt} \left(\frac{s_{k,j}}{\delta + n_j + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\eta-\alpha}} \left(\frac{s_{h,j}}{\delta + n_j + g}\right)^{\frac{\eta}{1-\eta-\alpha}} \tag{95}$$

$$\log \tilde{y}_j^* = \underbrace{\log A + gt}_{\text{vakio}} + \frac{\alpha}{1-\eta-\alpha} \log s_{k,j} + \frac{\eta}{1-\eta-\alpha} \log s_{h,j} - \frac{\alpha+\eta}{1-\eta-\alpha} \log(n_j + \delta + g) + \epsilon_j. \tag{96}$$

Viimeisin yhtälö voidaan estimoida OLS:lla. Selitettävä muuttuja $\log \tilde{y}_j^*$ on log per capita BKT vuonna 1985.

6.2.3 Estimoinnin tulokset

- Rajoitettu estimointi, jolloin $\eta = 0$, antaa $\alpha = 0.6$. Datassa yleisesti 0.3-0.4. Ilman humaania pääomaa malli yliarvioi α:n suurusen.
- Rajoittamaton estimointi: $\alpha \approx 0.3$ ja $\eta \approx 0.3$. Koska selitysaste noin 0.7, humaanipääoma selittää huomattavan osan tuloeroista maiden välillä.
- Tulos tarkoittaa, että teknologian tasoilla suhteellisen rajattu rooli pitkän aikavälin tuloeroissa, jolloin erot selittyvät eri investointiasteilla fyysiseen ja humaaniin pääomaan.

- Voidaan osoittaa, että konvergoitumis nopeus on nyt $\lambda = (1-\alpha-\eta)(\delta+g+n) = 0.024 = 2.4\%$. Tämä vastaa datassa havaittua, joten humaanilla pääomalla laajennettu Solow'n malli pystyy selittämään datassa havaitun konvergoitumis nopeuden. Tämän takia joskus standardi Solow'n mallissa käytetään arvoa $\alpha = 0.75$, jolloin ajatellaan pääoman laajennettua käsitettä (fyysinen+humaani).

6.2.4 Kritiikkiä estimointi tuloksia vastaan

- Mahdollinen puuttuvan selittäjän harha. Sama tekijä, mikä saa maan kehittämään teknologiaa ($\bar{A}_j = \epsilon_j A$), todenäköisesti johtaa myös korkeisiin investointiasteisiin $s_{k,j}$ ja $s_{h,j}$. Tällöin näiden estimaatit ovat ylöspäin harhaisia.
- Kausaalisuus ongelmat. Korkeampi $\bar{A}_j$ johtaa myös suurempaan insentiiviin investoida, jolloin $s_{k,j}$ ja $s_{h,j}$ ovat endogeenisiamuuttujia eivätkä eksogeenisa.
- Regression tulokset implikoivat liian suuria tuottoja koulutukselle, kun niitä verrataan mikrodatasta havaittuihin tuottoihin. Tämä todennäköisesti johtuu edellä mainituista syistä eli regressoreiden ja ϵ_j:n korrelaatiosta, joka johtaa η:n ylöspäin harhaiseen estimaattiin.
- $\Rightarrow$ Edellä ollut tulos onkin kyseenalaistettu yleisesti.

7 Viimeiset sanat talouskasvusta

Ennen kuin siirryn Ramsey:n malliin on hyvä tehdä yhteenveto taloukasvusta ja Solow'n mallista.

- Kasvulaskennalla pystytään selvittämään talouskasvun lähteet $\Leftrightarrow$ erot panosten kasvuasteissa pitkällä aikavälillä johtavat suuriin hyvinvointi eroihin.
- Kasvulaskenta ja Solow'n malli: kokonaistuottavuuden kehitys tärkeää. Toisaalta, esim. koulutustasot mahdollisesti tärkeitä (katso edellä). Minne pistäisi katsoa, kun hyvinvointieroja yritetään selittää? Konsensus (ehkä): Humaanin ja fyysisen pääoman erot ei lopuilta niin tärkeitä, vaan suurin osa BKT per capita eroista selityy, joko teknologian tasoeroilla tai

eroilla jopa sen kasvuasteissa.

- Teknologian kehittämisen analysointi ja sen hyväksyminen/käyttöön otto on keskeistä talouskasvun ymmärtämisen kannalta. Teknologia voidaan ymmärtää hyvin laajana, johon kuuluu esim. markkinoiden oragisointi ym.
- Solow'n mallin opetukset ovat rajoittuneita: maa on köyhä, koska sillä on alhainen teknologian ja pääoman (fyysinen ja humaani) tasot. Toteamus on sama kuin sanoa, että köyhät ovat köyhiä, koska heillä on vähän rahaa. Kuitenkin Solow'n malli opettaa kausaaliset syyt kehityseroille maiden suhteen, mutta lopullista vastaus ei saada.
- Endogeenisella kasvuteorialla voidaan malllintaa teknologian kehittymistä, mutta tämäkään ei vielä ole täysin tyydyttävää.
- Fundamentaalisia syitä maiden eroille käsiteltiin talouskasvun slideissa: miksi jonkin maa "valitsee" alhaisen humaanin pääoman tason? Tai, miksi maa valitsee instituutiot, joissa teknologia/tuottavuus ei kehity?

A Taylor approksiomaatio

A.1 Taylorin teoreema

Hyvin yleisesti käytetty funktion approksimointi menetelmä on ns. Taylorin teoreema (Taylor approksimaatio, Taylorin sarjakehitelmä). Funktio f on jatkuva ja n-kertaa derivoituva välillä $[a, b]$. Lisäksi $x_0 \in [a, b]$, silloin

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathcal{O}, \tag{A1}$$

missä $f^n(x_0)$ on funktion n:nen derivatan arvo pisteessä x_0 ja $\mathcal{O}$ kuvaa korkeamman asteen termejä (approksimaatio virhe) ≈ 0.

Monen muuttujan tapauksessa Taylorin teoreema on seuraava:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) \quad = \quad & f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{i,0}) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{i,0})(x_j - x_{j,0}) \\
& \vdots \\
& + \frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{i_1,0}) \cdots (x_{i_k} - x_{i_k,0}) \\
& + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{k+1}),
\end{aligned} \tag{A2}$$

missä $\mathbf{x}$ on k-ulotteinen vektori, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_k]'$ ja $\mathbf{x}_0$ on vektorin arvo pisteessä $x_{i,0}$ kaikille $i = 1, 2, \ldots, k$.

Makrossa useasti käytetään lineaarista – eli 1. asteen – aproksimaatiota ei lineaarisesta yhtälöryhmästä. Otetaan esimerkiksi ei-lineaarinen yhtälöryhmä, jossa on n muuttujaa ja m yhtälöä:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \vdots &= \vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{A3}$$

Nyt voidaan soveltaa Taylorin teoreemaa jokaiseen $\mathbf{f}$:n komponenttiin, jolloin saadaan lineaarinen kuvaus yhtlälöryhmä $\mathbf{f}$:stä pisteessä $\mathbf{x}_0$ eli

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + J(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{A4}$$

missä J on Jacobin matriisi pisteessä $\mathbf{x}_0$ eli

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0) &= \begin{bmatrix} f_1^1(\mathbf{x}_0) & f_2^1(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_n^1(\mathbf{x}_0) \\ f_1^2(\mathbf{x}_0) & f_2^2(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_n^2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ f_1^m(\mathbf{x}_0) & f_2^m(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_n^m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \quad \text{missä} \\ f_j^i(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial f^i(x_{1,0}, x_{2,0} \ldots, x_{n,0})}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{A5}$$

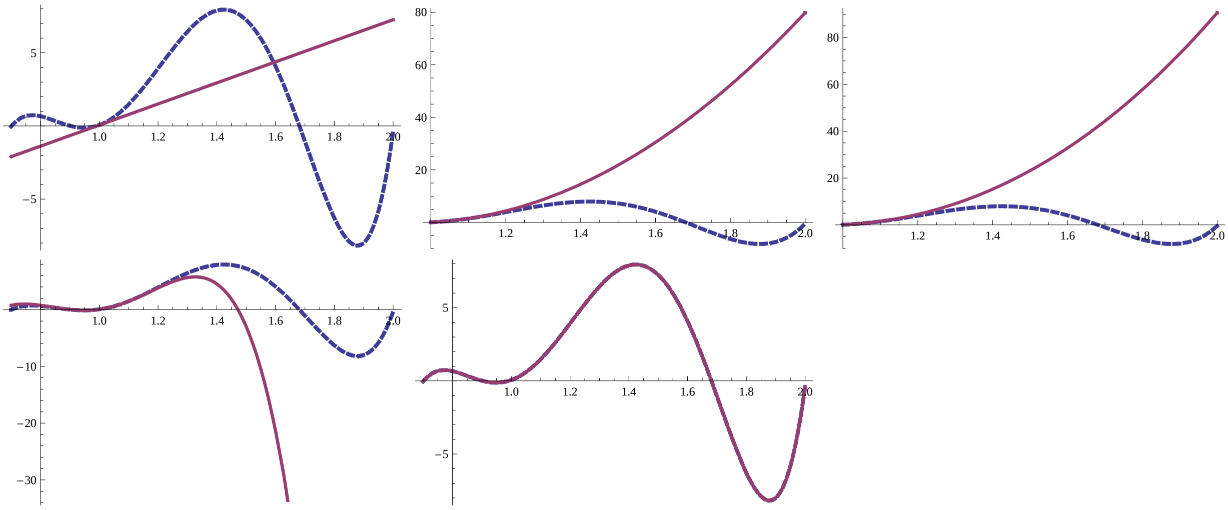
A.2 Taylorin approksimaatio käytännössä

Taylorin teoreema sanoo, että tietyssä pisteessä voidaan käyttää funktion derivaatan antamaa informaatiota siten, että funktiota voidaan aproksimoida polynomi-funktiolla tietyssä pisteessä. Tätä havainnollistetaan kuviossa A1.

Kuviossa A1 on funktiosta

$$f(x) = -690.59 + 3202.4x - 5739.45x^2 + 4954.2x^3 - 2053.6x^4 + 327.1x^5 \tag{A6}$$

laskettu 1-5 asteen Taylor approksimaatio pisteessä $x = 1$. Pisteen läheisyydessä approksimaatio



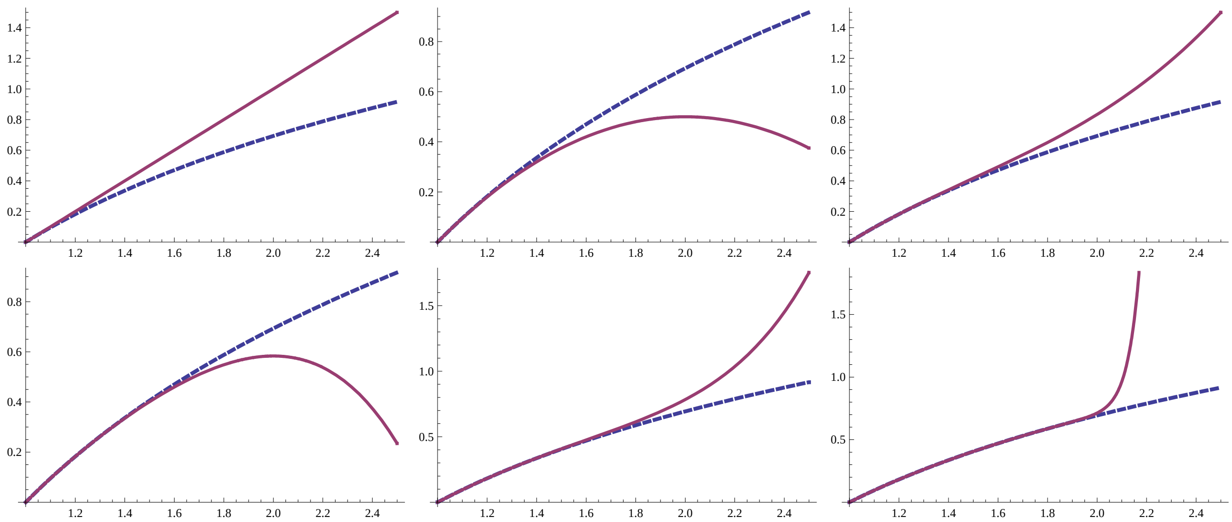
Kuva A1: 1-5 asteen Taylor approksimaatiot kehitetty pisteessä $x = 1$. Katkoviiva antaa alkuperäisen funktion ja yhtenäinen viiva Taylor approksimaatiot.

on tarkka, mutta kauemmas mentäessä tarkkuus huononee. 5:n asteen approksimaatio osoittaa Taylorin teoreeman käytännössä: ainoastaan käyttämällä pisteessä $x = 1$ olevaa informaatiota koko funktio pystyytään selvittämään tietylää välillä.

Kuvio A2 osoittaa taas, että Taylorin sarjakehitelmään ei pidä luottaa sokeasti. Varsinkin korkeamman asteluvun approksimaatiot voivat aiheuttaa ikäviä yllätyksiä.

Kuviossa A2 on funktiota $f(x) = \log x$ approksimoitu pisteessä $x = 1$ käyttäen 1-4 ja 25 kertaluvun Taylorin sarajakehitelmiä. Pisteen ympäristössä approksimaatio paranee, mutta sen ulkopuolella korkeamman asteen (varsinkin 25) tekevät suuren virheen. Siis, korkeamman asteluvun approksimaatiot parantavat tarkkuutta pisteen ympäristössä, mutta approksimaatio voi olla todella huono, vaikka oltaisiin vielä suht' lähellä pistettä. Hyvin usein onkin kysymys tarkkuuden ja robustisuuden välisestä valinnasta.

Taloustieteessä varma valinta on käyttää 1. asteen approksimaatiota, mutta joiden kysymysten tarkastelu vaatii 2. asteen approksimaation, koska tällöin saadaan muuttujien varianssi huomoitua. Käyttämällä 1. asteeen approksimaatiota ei ainakaan luo uutta steady state:ä malliin, joten suosittelen ainakin aluksi käyttämään sitä.



Kuva A2: 1-5 ja 25 asteen Taylor approksimaatiot kehitetty pisteessä $x = 1$ logaritmi funktiolle. Katkoviiva antaa alkuperäisen funktion ja yhtenäinen viiva Taylor approksimaatiot.