KTS21

2. harjoitukset

Tomi Kortela

1. Dynaaminen optimointi.

   a) Laske kontrollimuuttujalle $c(t)$ aikaura, jonka ratkaisun pitää toteuttaa, kun ongelma on

$$\begin{aligned} \max_{[c(t)]_{t=0}^{\infty}} U &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \log c(t) dt && (1) \\ \text{niin että } \dot{a}(t) &= ra(t) + y(t) - c(t) \text{ ja} && (2) \\ a(0) &= \bar{a} > 0 \quad \text{sekä nPg-rajoite,} && (3) \end{aligned}$$

   jossa $y(t)$ ja r ovat eksonogeenisia ja tiedetty $\forall\ t$. Lisäksi piirrä kulutuksen urat tilanteessa, jossa i) $r > \rho$, ii) $r = \rho$ ja iii) $r < \rho$. Ajatellaan, että urat lähtevät aina samasta pisteestä $c(0) > 0$.

   b) Kirjoitetaan dynaamisen optimoinnin luentomuistiinpanoissa ollut yrityksen investointi ongelma nyt diskreetin ajan versiona

$$\begin{aligned} \max_{\{I_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} & \sum_{t=0}^{\infty} R^t \left[f(K_t) - I_t - \phi(I_t) \right] && (4) \\ \text{niin että} \quad K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t, && (5) \\ K_0 &= \bar{K} > 0 \quad \text{sekä nPg-rajoite,} && (6) \end{aligned}$$

   missä $R = \left(\frac{1}{1+r}\right)$. Oletata lisäksi, että $\phi(I) = \frac{1}{2}I^2\ \forall\ t$. Kirjoita Lagrangea ongelmasta ja ratkaise I_{t+1} 1. asteen ehdoista.

2. Kahden periodin elinkaari malli. Ajatellaan luennolla ollutta esimerkkiä, mutta nyt $T = 2$.

Kotitalouden ongelma on siis

$$\begin{aligned}
\max_{c_0,c_1,a_1} U &= u(c_0) + \beta u(c_1) && (7)\\
\text{niin että } a_1 &= (1+r)a_0 + y_0 - c_0 && (8)\\
a_2 &= (1+r)a_1 + y_1 - c_1 && (9)\\
a_0 &= a_2 = 0. && (10)
\end{aligned}$$

a) Kirjoita lagrangea ja ratkaise 1. asteen ehdoista Euler yhtälö.

b) Oletetaan tästä eteenpäin, että kotitaloudella on CRRA-hyötyfunktio eli $u = \frac{u(\cdot)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$. Johda Euler-yhtälöitä muoto, jossa LHS on muodossa $\frac{c_1}{c_0}$. Tämän jälkeen laske $\frac{d\log\left(\frac{c_1}{c_0}\right)}{d\log(1+r)}$. Anna vastauksellesi tulkinta.

c) Muodosta aluksi budjettirajoitteista (8) ja (9) yksi budjettirajoite. Tämän jälkeen käyttämällä Euler-yhtälöä ratkaise kulutus periodille c_0 tulojen, koron ja β:n funktiona.

d) Oletetaan vielä, että $y_1 = 0$. Laske $\frac{\partial c_0}{\partial(1+r)}$ eli periodin c_0 kulutuksen muutos, kun periodin 1 kulutuksen hinta – eli korko – $1 + r$ muuttuu. Osoita derivaatan merkki tilanteissa i) $\sigma = 1$, ii) $0 < \sigma < 1$ ja iii) $\sigma > 1$. Anna taloustieteellinen tulkinta saamillesi etumerkeille.

3. Bellman-yhtälö ja arvofunktion iterointi diskretoinnilla.

Käsitellään seuraavaa Ramsey-ongelmaa:

$$\begin{aligned}
\max U &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t) && (11)\\
\text{niin että } k_{t+1} &= y_t - c_t + (1-\delta)k_t, \text{ jossa} && (12)\\
y_t &= Ak_t^{\alpha} \text{ ja } \delta = 1. && (13)
\end{aligned}$$

a) Kirjoita ongelmalle Bellman-yhtälö, joka riippuu k:sta ja k':sta.

b) Hae VALUE.XLS ja iteroi Bellman-yhtälöä 10 kertaa. Eli tee seuraava:

- Käyttämällä annettuja parametriarvoja A, β ja α. Laske ruudukkoon C11:V29 Bellman yhtälön RHS (ilman maksimointia). Eli jokaisella k_i:n arvolle laske eri k_j:n antamat arvot käyttämällä arvausta $V(k_j) = 0 \; \forall \; j$. Muista käyttää IF-lausetta, joka laittaa arvokasi -10, jos kulutus on negatiivista.

- Soluihin X11:X29 laske jokaisen rivin maksimiarvo käyttämällä MAX-lauseketta. Tämä on V^1.
- Soluihin Y11:Y29 laske jokaista maksimiarvoa vastaava grid point -piste (eli hilapiste) jokaiselle k_i. Tämä tapahtuu käyttämällä HLOOKUP-funktiota. Esim. riville 11 kirjoita seuraava: HLOOKUP(X11;$C11:$V$31;22-A11;FALSE).
- Soluihin Z11:Z29 laske edellä lasketun grid pointin tuottama k_j käyttämällä VLOOKUP-funktiota. Siis, riville 13 kirjoitetaan esim. VLOOKUP(Y11;$A$11:$B$30;2;1). Tämä optimaalinen politiikka $k_{t+1} = g(k_t)$.
- Sarakkeeseen AA siirrä komennolla cut -> paste special -> transpose edellinen V – siis V^0 – eli $V(k_j) = 0$.
- Sarakkeeseen AB laske $\left|V^0 - V^1\right|$, jossa V^1 on nyt sarakkeessa X. Muista käyttää komentoa ABS, jotta saat itseisarvon. Lopuksi laske vielä max($\left|V^0 - V^1\right|$).
- Toista tämä proseduuri nyt alla olevissa kehikoissa, jotka ovat vastaavia. Voit kopioida edellä saadut arvot ja vain tehedä tarvittavat muutokset. Muista päivittää V joka iteraation yhteydessä. Esimerkiksi sarakkeisiin C34:V34 tulee nyt Bellman-operaattorin antama V, joka on sarakkeessa X (cut -> paste special -> transpose).
- Tehdyistä oletuksista johtuen ongelmalla on suljetun muodon ratkaisu, jolloin politiikka on $k_{t+1} = A\beta\alpha k_t^\alpha$. Raportoi kuvio, jossa on 45-asteen suora, edellä annettu optimaalinen politiikka, 2. iteraation politiikkafunktio, 4. iteraation politiikkafunktio ja viimeisen iteraation politiikkafunktio. Lisäksi raportio kuvio, jossa on arvofunktio 1., 2., 3., 4. ja viimeisen iteraation kohdalta.

c) Laske steady state pääomakannan taso optimaalisesta politiikasta $k_{t+1} = A\beta\alpha k_t^\alpha$. Mitä tapahtuu politiikkafunktiolle tässä pisteessä?

4. Solow ja työvoiman kasvuasteen muutos.

   a) Piirrä Solow'n diagrammissa tapahtuma, jossa $n \to n'$ ja $n > n'$?

   b) Piirrä kuvio, missä hahmotat $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$:n muutosta.

   c) Kirjoita yhtälö, mistä näet BKT per capita:n muutoksen. Piirrä BKT per capitan kasvuasteen muutoksesta kuvio ajan funktiona.

5. Solow ja kultainen sääntö.

   a) Laske kultaisen säännön mukainen säästämisasteen taso eli maksimoi kulutusta c säästämisasteen s suhteen:

$$\max_{s} \quad c_*(s) = k_*^{\alpha} - (\delta + n + g)k_*, \tag{14}$$

   missä $k_*(s, n, g, \delta)$.

   b) Laske pääoman k_* taso, kun s on kultaisen säännöntasolla.

   c) Laske tuotantofunktion $y = k^{\alpha}$ derivaatan arvo, kun $k_* = k_*^{\text{gold}}$.

   d) Piirrä tilanteesta kuvio, jossa korostat edellistä tulosta (siis sitä, että c maksimoituu).

   e) Keksi jokin markkinaepäonnistuminen, jonka johdosta säästämisaste on liian pieni tai liian suuri.