

KTS21

1. harjoitukset

Tomi Kortela

1. Osoita, että ottamalla logaritmit ja differentoimalla ajan suhteen saadaan

a) muuttujien

$$A(t) = A_0 e^{gt} \quad (1)$$

$$L(t) = L_0 e^{nt} \quad (2)$$

kasvuasteet.

b) Osoita, että muuttujien tulon kasvuaste on muuttujien kasvuasteiden summa eli

$$Z(t) = X(t)Y(t) \quad \text{niin silloin} \quad (3)$$

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} + \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \quad (4)$$

c) Osoita, että muuttujien suhteen kasvuaste on muuttujien kasvuasteiden erotus eli

$$Z(t) = \frac{X(t)}{Y(t)} \quad \text{niin silloin} \quad (5)$$

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} - \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \quad (6)$$

d) Osoita, että jos

$$Z(t) = X(t)^\alpha \quad \text{niin silloin} \quad (7)$$

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} = \alpha \frac{\dot{X}(t)}{X(t)}. \quad (8)$$

2. Osoita, että yhtälö

$$\dot{k}(t) = sk(t)^\alpha - k(t)(\delta + n + g) \quad (9)$$

on k_* :n ympäristössä stabiili. Muista aluksi myös osoittaa, että k_* toteuttaa yhtälön $\dot{k}(t) = 0$.

3. Hae kurssin kotisivuilta SOLOW.XLS tiedosto ja täytä siihen puuttuvat kohdat käyttämällä luentomateriaalia. Kyseessä on Solow'n malli seuraavilla parametrien arvoilla: $n = 0.01$, $g = 0.02$, $\delta = 0.05$, $\alpha = 0.33$ ja $s = 0.25$

- Välilehdelle "Solow'n diagram"...

a) Täyty soluihin E3-E6 pyydetetty arvot parametrien funktiona. Vastauksessa raportoi ko. arvot.

b) Laske pääoman eri arvoilla (annettuna B-sarakkeessa) Solow'n mallin investointien (C-sarake), pääoman kulumisen per efektiivinen työntekijä (D-sarake) ja tuotannon arvo (E-sarake). Vastauksessa näytä Excel:llä piirretty Solow'n diagrammi.

c) Luennolla Solow'n malli esitettiin myös k :n kasvuasteen – eli $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ – avulla. Piirrä myös tämä kuvio myös vastaukseesi Excel:llä. (Kuvion arvot G-sarakkeeseen).

- Välilehdellä "Aikaurat" tarkastellaan säästämisasteen, s , muutosta Solow'n mallissa ja samalla toistetaan Romer:n kirjan s.19 kuvio. Täytä seuraavat kohdat...

d) Käyttämällä arvoja B3-B7 laske pyydetty steady state -arvot E3-E6. Tee sama käyttämällä uusia steady state arvoja H3-H7 (säästämisaste muuttunut) sarakkeeseen K. Laske nyt myös konvergoitumisnopeus λ . Raportoi vastauksessa kaikki edellä pyydetty arvot.

e) A-sarakkeessa (A10-A200) on aika ja B-sarakkeessa on eksogeeninen (säästämisasteen) muutos. Laske sarakkeeseen C k :n arvo tasoissa ja D-sarakkeeseen k :n kasvuaste. Raportoi näistä kuviot vastauksessasi.

f) Sarakkeeseen E laske $\frac{Y}{L}$:n kasvuaste. Raportoi tästä kuvio vastauksessasi.

- g) Sarakkeeseen F laske $\frac{Y}{L}$:n taso logaritmeissa, kun säästämisasteen muutos huomioidaan ja sarakeeseen G $\frac{Y}{L}$:n taso käyttämällä ainoastaan vanhoja steady state -arvoja (siis muutosta s :ssä ei huomioida). Piirrä sarakkeet E ja F samaan kuvioon ja raportoi vastauksessasi.
- h) Sarakkeeseen H laske kulutuksen aikaura ja sarakeeseen I kulutuksen aikaura vanhassa steady state:ssä (siis ilman s :n muutosta). Piirrä sarakkeet H ja I samaan kuvioon ja raportoi kuvio vastauksessasi.
4. Yritys sektori jätettiin vähälle huomiolle luentomuistiinpanoissa, mutta tarkastellaan sitä tarkemmin nyt.
- a) Johda 1. asteen ehdot yrityksen staattiselle optimointi ongelmalle, jossa hinnat $W(t)$ ja $R(t)$ tulevat annettuna

$$\max_{K \geq 0, L \geq 0} \pi = K^\alpha (A(t)L)^{1-\alpha} - R(t)K - W(t)L \quad (10)$$

- b) Sekä pääoma että työmarkkinoiden pitää olla tasapainossa eli sijoita $K = K(t)$ ja $L = L(t)$ 1. asteen ehtoihin ja laske hinnoille yhtälö, joka niiden pitää toteuttaa. Huomaa, että $R(t) = r(t) + \delta$, missä $r(t)$ on korkotaso taloudessa.
- c) Laske yrityksen 1. asteen ehdoista suure $\frac{R}{W}$ ja ratkaise K . Sijoita K takaisin 1. asteen ehtoihin. Mitä tapahtui? Onko yrityksen koko määritelty? Kommentoi.
- d) Laske hinnat per efektiivinen työntekijä, ja laske $R(t)$:n ja palkan, $W(t)$, kasvuvauhti tasapainoitettulla kasvu-uralla ja siirtymäuralla kohti uutta steady state:a. Ajatellaan vielä, että kysymyksessä on kehittyvä talous jolloin $\frac{\dot{k}}{k} > 0$.
- e) Osoita, että $Y(t) = R(t)K(t) + W(t)L(t)$.
- f) Lisäksi laske vielä pääomalle maksettavien korvauksien osuus BKT:stä eli $\frac{R(t)K(t)}{Y(t)}$ ja sama työvoimalle eli $\frac{W(t)L(t)}{Y(t)}$. Mikä näiden kasvuaste on?

5. AK-kasvumalli. Tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaisinta endogeenista kasvumalli, joka tunnetaan AK-kasvumallina. Nyt tuotanto määräytyy seuraavasti

$$Y(t) = AK(t). \quad (11)$$

Pääoma kumuloituu edelleen yhtälön

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \quad (12)$$

mukaisesti. Oletetaan, että ainoastaan työvoima kasvaa eli $L(t) = L_0 e^{nt}$, mutta teknologinen kehitys on tasolla A koko ajan, eikä kasva. Lisäksi pätee, että $As > \delta + n$, jossa s on kotitalouksien säästämisaste.

- a) Johda differentiaaliyhtälö nyt $\dot{k}(t)$:lle käyttämällä Solow'n mallista tuttuja tasapainon ehtoja. Kotitalouksien oletetaan käyttäytyvän samalla tavalla kuin Solow'n mallissa. Huomaa, että pienet kirjaimet nyt merkaavat per capita muuttujia.
- b) Piirrä kuvio, jossa "x-akselilla" on $k(t)$ ja "y-akselilla" on $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$. Lisäksi piirrä Solow diagrammi ilman tuotantoa. Kommentoi kuvioiden avulla nyt steady state pääoman k_* arvoa.
- c) Laske BKT per capita:n kasvuasteelle yhtälö (huom! $y(t)$ antaa nyt BKT per capita:n tason). Käyttämällä kuviota, jossa "x-akselilla" on $k(t)$ ja "y-akselilla" on $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ kerro, BKT per capita:n kasvuaste.
- d) Miten säästämisasteen muutos muuttaa talouden kasvuastetta? Vertaa tulosta Solow'n mallin tulokseen.