TKMS10/KTS13 Matemaattinen rahoitus, 25.11.2011

1. Määritellään satunnaismuuttuja Y_t yhtälöstä

$$Y_t = \mathbf{1}_{[L,\infty)}(A_t) + k\mathbf{1}_{(0,L)}(A_t)$$

missä $L > 0, k \in [0,1]$ ovat tunnettuja vakioita,

$$\mathbf{1}_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

ja prosessi A_t määräytyy sdy:stä

$$dA_t = rA_t dt + \sigma A_t dW_t, \quad A_0 = a \in \mathbb{R}_+.$$

Määritä $\mathbb{E}[Y_t]$ sekä $\mathbb{E}[Y_t^2]$.

2. Johda Itôn lausetta soveltamalla sdy prosessille $X_t N_t$, missä

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x$$

ja

$$dN_t = aN_t dt + bN_t dW_t, \quad N_0 = 1.$$

Valitse tätä kautta johdetussa $X_t N_t$:tä kuvaavassa sdy:ssä kertoimet a ja b siten, että dW_t-termit häviävät (ts. satunnaisuus eliminoituu dynamiikasta).

3. Johda Itôn lausetta soveltamalla sdy prosessille $X_t N_t$, missä

$$dX_t = \mu(X_t) X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x,$$

ja

$$dN_t = aN_t dt + bN_t dW_t, \quad N_0 = 1.$$

Valitse tätä kautta johdetussa $X_t N_t$:tä kuvaavassa sdy:ssä kertoimet a ja b siten, että dW_t-termit häviävät (ts. satunnaisuus eliminoituu dynamiikasta).

4. Tarkastellaan sdy:itä (kahden faktorin malli)

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t dt + 2X_t dW_1(t) + 2X_t dW_2(t), \quad X_0 = x \\ dY_t &= 3Y_t dt + 3Y_t dW_1(t) + Y_t dW_2(t), \quad Y_0 = y \end{aligned}$$

Määritä se deflaattori

$$M_t = e^{-c_1 W_1(t) - c_2 W_2(t) - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)t}$$

jonka alaisuudessa

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t X_t] &= x \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t Y_t] &= y. \end{aligned}$$

5. Tarkastellaan sdy:itä (kahden faktorin malli)

$$\begin{aligned} dX_t &= 0.35X_t dt + 0.3X_t dW_1(t) + 0.2X_t dW_2(t), \quad X_0 = x \\ dY_t &= 0.25Y_t dt + 0.3Y_t dW_1(t) + 0.1Y_t dW_2(t), \quad Y_0 = y \end{aligned}$$

Määritä se deflaattori

$$M_t = e^{-c_1 W_1(t) - c_2 W_2(t) - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)t}$$

jonka alaisuudessa

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t X_t] &= xe^{0.05t} \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t Y_t] &= ye^{0.05t}. \end{aligned}$$

6. Tarkastellaan sdy:itä (kahden faktorin malli)

$$\begin{aligned} dX_t &= 0.35X_t dt + 0.3X_t dW_1(t) + 0.2X_t dW_2(t), \quad X_0 = x \\ dY_t &= 0.25Y_t dt + 0.3Y_t dW_1(t) + 0.1Y_t dW_2(t), \quad Y_0 = y \end{aligned}$$

Määritä se deflaattori

$$M_t = e^{-c_1 W_1(t) - c_2 W_2(t) - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)t}$$

jonka alaisuudessa

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t X_t] &= x e^{0.15t} \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t Y_t] &= y e^{0.25t}. \end{aligned}$$

7. Tarkastellaan sdy:itä (kolmen faktorin malli)

$$\begin{aligned} dX_t &= 0.15X_t dt + 0.3X_t dW_1(t) + 0.2X_t dW_2(t) + 0.2X_t dW_3(t), \quad X_0 = x \\ dY_t &= 0.05Y_t dt + 0.3Y_t dW_1(t) + 0.1Y_t dW_2(t) + 0.2Y_t dW_3(t), \quad Y_0 = y. \end{aligned}$$

Onko olemassa deflaattoria

$$M_t = e^{-c_1 W_1(t) - c_2 W_2(t) - c_3 W_3(t) - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)t}$$

siten, että

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t X_t] &= x \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t Y_t] &= y. \end{aligned}$$

8. Tarkastellaan sdy:itä (kolmen faktorin malli)

$$\begin{aligned} dX_t &= 0.15X_t dt + 0.3X_t dW_1(t) + 0.2X_t dW_2(t) + 0.2X_t dW_3(t), \quad X_0 = x \\ dY_t &= 0.1Y_t dt + 0.3Y_t dW_1(t) + 0.1Y_t dW_2(t) + 0.1Y_t dW_3(t), \quad Y_0 = y. \end{aligned}$$

Onko olemassa deflaattoria

$$M_t = e^{-c_1 W_1(t) - c_2 W_2(t) - c_3 W_3(t) - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)t}$$

siten, että

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t X_t] &= x e^{0.05t} \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t Y_t] &= y e^{0.05t}. \end{aligned}$$

9. Tarkastellaan sdy:itä (kahden faktorin malli)

$$\begin{aligned} dX_t &= 0.25X_t dt + 0.3X_t dW_1(t) + 0.2X_t dW_2(t), \quad X_0 = x \\ dY_t &= 0.15Y_t dt + 0.3Y_t dW_1(t) + 0.1Y_t dW_2(t), \quad Y_0 = y \\ dZ_t &= 0.35Z_t dt + 0.2Z_t dW_1(t) + \sigma_{32} Z_t dW_2(t), \quad Z_0 = z \end{aligned}$$

Minkä ehdon vallitessa on olemassa deflaattori

$$M_t = e^{-c_1 W_1(t) - c_2 W_2(t) - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)t}$$

siten, että

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t X_t] &= x e^{0.05t} \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t Y_t] &= y e^{0.05t} \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t Z_t] &= z e^{0.05t}. \end{aligned}$$

10. Oletetaan, että vallitseva riskitön tuotto $r_f \geq 0$ on tunnettu ja kohde-etuuksien arvojen $\mathbf{S}_t \in \mathbb{R}^4$ dynamiikalle pätee (neljän faktorin malli)

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= a_1 S_1(t)dt + S_1(t)\left[dW_1(t) + dW_3(t) + dW_4(t)\right] \\ dS_2(t) &= a_2 S_2(t)dt + S_2(t)\left[2dW_1(t) + dW_2(t) + dW_3(t)\right] \\ dS_3(t) &= a_3 S_3(t)dt + S_3(t)\left[dW_2(t) + dW_3(t) + dW_4(t)\right] \\ dS_4(t) &= a_4 S_4(t)dt + S_4(t)\left[2dW_2(t) + 2dW_4(t)\right]. \end{aligned}$$

Ovatko markkinat arbitraasittomat?